# Minicurso IME 1 - O espaço "universal"

Abril, 2024

## Antes de começar

- Vamos discutir três exemplos paradigmáticos de sistemas dinâmicos: o "shift", a duplicação de ângulo e o solenóide.
- Faremos isso contando uma história que começa com o conjunto de dois elementos $\{0,1\}$ e nos leva, "naturalmente", a esses sistemas dinâmicos.
- Ao longo do caminho, veremos outras coisas como quocientes, números reais e p-ádicos (com $p=2$).
- Veremos ainda, mas brevemente, um quarto sistema dinâmico: o odômetro.
- Juntos, esses exemplos e técnicas formam boa parte do feijão-com-arroz com que dinamicistas trabalham diariamente.

# O espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

- O conjunto

$$\boxed{\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ \underline{x} = x_1 x_2 x_3 \dots \; : \; x_j \in \{0,1\} \}}$$

é o conjunto de sequências infinitas (para a direita) de 0s e 1s.

- Definimos a discrepância entre $\underline{x}, \underline{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ por

$$\boxed{\operatorname{discr}(\underline{x}, \underline{y}) = \min \{ j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j \}}$$

é o primeiro "momento" em que as sequências $\underline{x} = (x_j)$ e $\underline{y} = (y_j)$ diferem. Ou $\operatorname{discr}(\underline{x}, \underline{y}) = \infty$ se $\underline{x} = \underline{y}$.

- A distância entre $\underline{x}$ e $\underline{y}$ é

$$\boxed{d(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{2^{\mathrm{discr}(\underline{x},\underline{y})}}.}$$

$\left(\text{Aqui } \frac{1}{2^\infty} := 0.\right)$

- Por exemplo,

$$d(01110\ldots, 11010\ldots) = \frac{1}{2}$$

$$d(00110\ldots, 00010\ldots) = \frac{1}{8}$$

- Note que distâncias entre dois pontos pertencem ao conjunto

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\} \cup \{0\}.$$

- Note também que se $\underline{x} = 0\ldots$, $\underline{y} = 1\ldots$ então $d(\underline{x},\underline{y}) = 1/2$ e que o conjunto de todos os elementos que distam menos que $1/2$ de $\underline{x}$ são aqueles da forma $\underline{z} = 0\ldots$.

- Isto é, a "bola (aberta) de centro $\underline{x}$ e raio $1/2$" é

$$B(\bar{x}; 1/2) := \{ \underline{z} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : d(\underline{x},\underline{z}) < 1/2 \}$$

$$= \{ \underline{z} = 0 z_2 z_3 \ldots \}$$

- Do mesmo modo

$$B(\underline{y}, 1/2) = \{ \underline{w} = 1 w_2 w_3 \ldots \}$$

- Algumas coisas curiosas a serem observadas:
  - $B(\underline{x};1/2) \cup B(\underline{y};1/2) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
  - $B(\underline{x};1/2) \cap B(\underline{y};1/2) = \emptyset$.

  As duas bolas são uma PARTIÇÃO de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

  - Se $\underline{z} = 0\ldots$, então $B(\underline{z},1/2) = B(\underline{x},1/2)$: todo ponto na bola é centro da bola.
- Portanto, há apenas essas duas bolas (abertas) de raio $1/2$ no espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
- E, como apenas o primeiro símbolo é usado para determinar o (um) centro, deveríamos denotá-las por

$$B(0;1/2) \quad \text{e} \quad B(1;1/2).$$

- Como já mencionamos, distâncias entre dois pontos distintos pertencem ao conjunto $\{1/2^n : n \in \mathbb{N}\}$.

- O diâmetro de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é $1/2$ e, assim, se $r > 1/2$ $B(\underline{x}, r) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

  → $\sup\{d(\underline{x},\underline{y}) : \underline{x}, \underline{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$

- Se $1/4 < r < 1/2$, não há pontos à distância $r$ um do outro. Portanto:

  (i) $B(\underline{x}; r) = B(\underline{x}; 1/2) \quad \forall\, 1/4 < r \leq 1/2$.

  (ii) $B(\underline{x}; r) = \overline{B}(\underline{x}; r) \quad \forall\, 1/4 < r < 1/2$.

  ↑ bola fechada $\{\underline{z} : d(\underline{x}, \underline{z}) \leq r\}$

- Bolas abertas são bolas fechadas e vice versa!

- Passemos agora à "próxima" distância, $1/4$, mas usemos, para isso, a experiência que acabamos de adquirir.

- Há quatro "tipos" de pontos a serem considerados neste caso, cujos dois símbolos iniciais são 00, 01, 10, 11.

  - $d(00\ldots, 01\ldots) = 1/4$

    $d(10\ldots, 11\ldots) = 1/4$

  - Pontos dos tipos 00 e 01 estão em $B(0; 1/2)$ e todos os pontos dessa bola são de um desses dois tipos.

  - Analogamente, os tipos 10, 11 estão em $B(1; 1/2)$ e todos os pontos dessa bola são de um desses dois tipos.

- Todos os pontos de um dado tipo distam menos que 1/4 um do outro: por exemplo, $d(00\ldots, 00\ldots) < 1/4$

- Isto é,

união disjunta

$$B(0; 1/2) = B(00; 1/4) \sqcup B(01; 1/4)$$
$$B(1; 1/2) = B(10; 1/4) \sqcup B(11; 1/4)$$

- As quatro bolas (abertas) de raio 1/4 formam, em parel, uma partição das duas bolas de raio 1/2 e essas, por sua vez, formam uma partição de todo o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

- Continuando indutivamente, provamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ os $2^n$ bolas da forma $B(s_1 s_2 \ldots s_n ; 1/2^n)$, onde $s_1 s_2 \ldots s_n$ é uma palavra finita de 0s e 1s, isto é, um elemento de $\{0,1\}^n$, formam uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

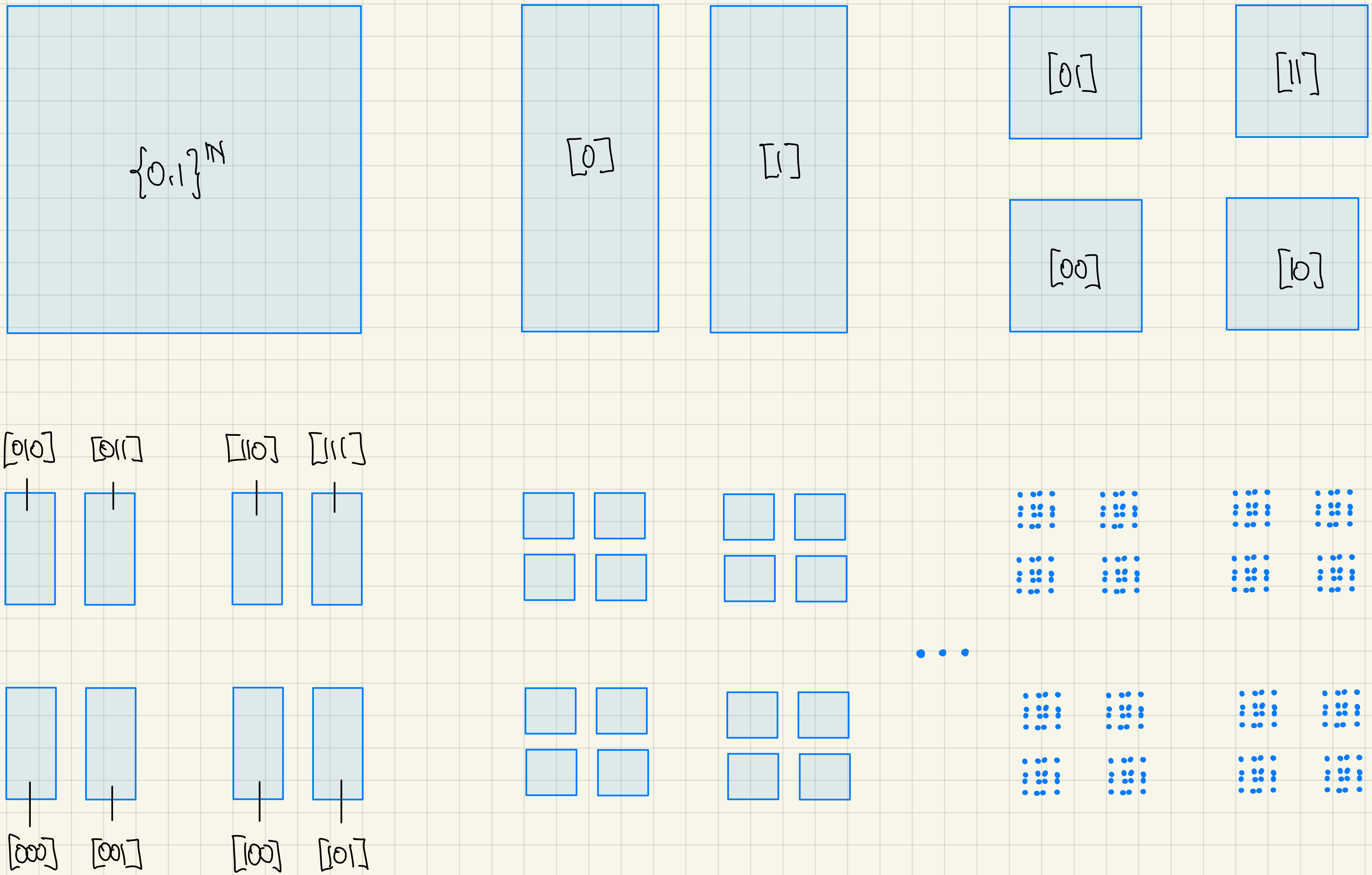
- Notação - Cilindros :

$$
\begin{aligned}
[s_1 s_2 \ldots s_n] &= B(s_1 \ldots s_n ; 1/2^n) \\
&= \{ \underline{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_i = s_i \ \forall\, i = 1, \ldots, n \}
\end{aligned}
$$

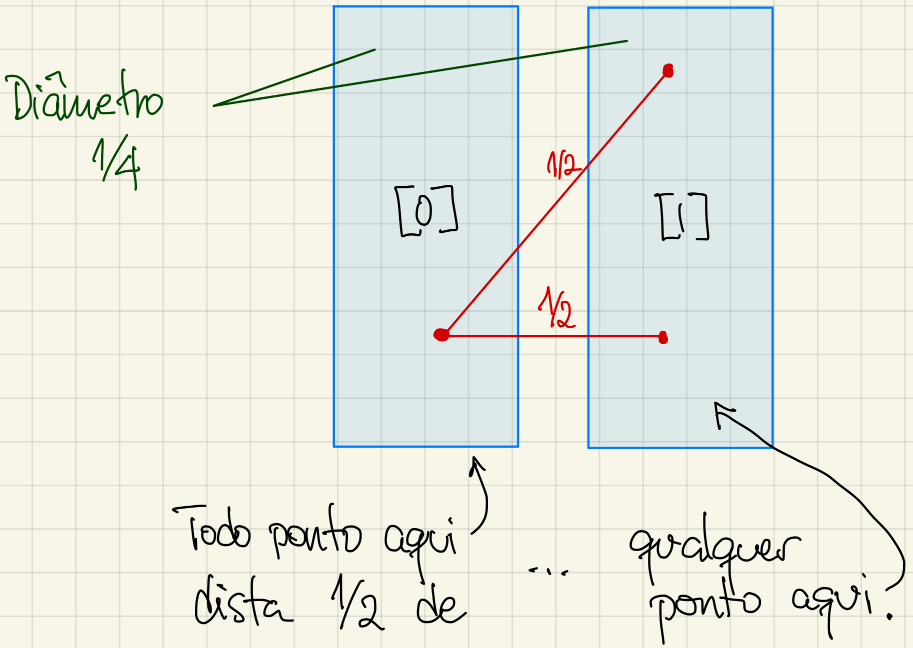
- Para todo $n \in \mathbb{N}$

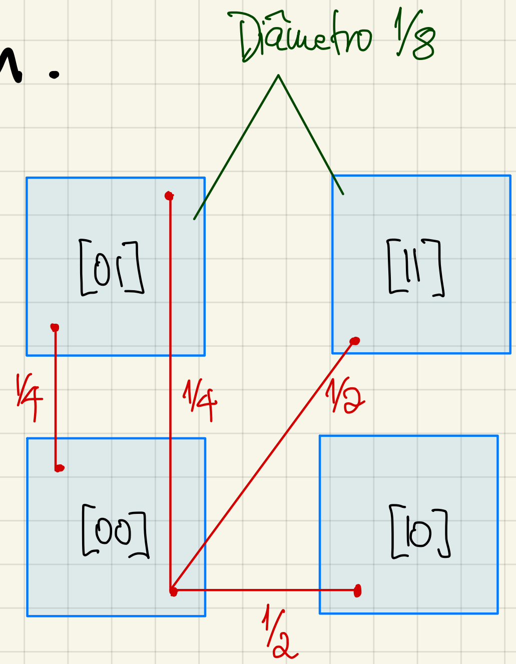
$$
\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \bigsqcup_{s_1 \ldots s_n \in \{0,1\}^n} [s_1 s_2 \ldots s_n]
$$

- Uma figura vale mais que mil palavras, mas ...



- ..., palavras são úteis ainda assim.




- Entre outras esquisitices, nesse espaço só existem triângulos (estritamente) isósceles.

- $\boxed{\{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ é um conjunto de Cantor}}$, isto é, é um espaço métrico com as seguintes propriedades.

  - Totalmente limitado : $\forall \delta > 0$, existe uma cobertura finita por bolas de raio $\delta$. Óbvio da figura anterior.

  - Completo : toda sequência de Cauchy converge. Se uma sequência é de Cauchy, então os símbolos até N estabilizaram, isto é, sabemos os primeiros N símbolos do limite, com N arbitrariamente grande. Estamos seguindo uma sequência de retanglinhos cada vez menores e, no "fim", há um ponto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

  - Um espaço com essas duas propriedades é chamado compacto.

- **Totalmente separado** (que implica **totalmente desconexo**): dados quaisquer dois pontos distintos $a, b$, existem abertos $A \ni a$, $B \ni b$, tais que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Óbvio da figura.

- **Perfeito**: todo ponto é ponto de acumulação. Idem.

- **Espaço "Universal"**: dei esse título à palestra por que é sexy, mas também pelo

**Teorema de Hahn-Mazurkiewicz**: Todo espaço topológico compacto, Hausdorff, conexo, localmente conexo e com base enumerável é quociente de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

# Minicurso IME 2 - Shif e duplicação de ângulo

Abril, 2024

A TRANSFORMAÇÃO DE SHIFT $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \circlearrowleft$

Essa setinha curva enfatiza que se trata de um sistema dinâmico, isto é, de uma transformação de um espaço nele próprio, que pode, portanto, ser iterada.

# Dinâmica

- A primeira transformação que associa sequências de 0s e 1s a sequências de 0s e 1s na qual qualquer pessoa normal pensaria é o shift:

$$\boxed{\sigma(x_1 x_2 x_3 \ldots) = x_2 x_3 x_4 \ldots}$$

- O que talvez seja surpreendente é que esta transformação tão óbvia é também tão interessante e rica.

- Vejamos ...

- $\sigma$ é 2-1 : $\sigma(0x_2x_3\dots) = \sigma(1x_2x_3\dots) = x_2x_3\dots$

- $\sigma$ leva cada um dos dois cilindros $[0]$ e $[1]$ sobre todo o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$\sigma$ é 2-Lipschitz

- Em cilindros, $\sigma$ dobra distâncias:

$$\text{se } \operatorname{discr}(\underline{x},\underline{y}) = n > 1 \qquad \left(\Leftrightarrow \quad d(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{2^n}\right)$$

então              então

$$\operatorname{discr}(\sigma(\underline{x}),\sigma(\underline{y})) = n-1 \qquad \left(\Leftrightarrow \quad d(\sigma(\underline{x}),\sigma(\underline{y})) = \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

- Por que isso só funciona dentro de cilindros?

- Iterando $\sigma$, é possível levar qualquer cilindro sobre todo o espaço:

$$\sigma([s_1 s_2 \dots s_n]) = [s_2 s_3 \dots s_n]$$
$$\sigma([s_2 s_3 \dots s_n]) = [s_3 s_4 \dots s_n]$$
$$\vdots$$
$$\sigma([s_n]) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

n-ésima iterada, isto é, $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ vezes}}$

- Em símbolos: $\sigma^n([s_1 \dots s_n]) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

- Isto é, $\sigma$ é localmente eventualmente sobrejetiva: qualquer conjunto aberto cresce sob iteração até cobrir todo o espaço.

- Um ponto $\underline{x}$ é periódico se existe $n \geq 1$ tal que

$$\sigma^n(\underline{x}) = \underline{x}.$$

$n$ é o (um) período de $\underline{x}$.

- $\underline{x}$ é periódico se é repetição infinita de uma palavra finita de 0s e 1s (isto é, um elemento de $\{0,1\}^n$).

  repetido infinitamente

  - $000\bar{0}\ldots$ e $111\bar{1}\ldots$ são pontos fixos
  - $101101\overline{101}\ldots$ é periódico de período 3 (e 6 e 9 e 12...)

- $\sigma$ tem $2^n$ pontos periódicos de período $n \in \mathbb{N}$: há tantos pontos periódicos de período $n$ quanto há elementos em $\{0,1\}^n$.

- Todo cilindro contém um número infinito de pontos periódicos: em $[s_1 s_2 \dots s_n]$, toda palavra da forma $s_1 s_2 \dots s_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_N$ produz, repetida infinitamente, um ponto periódico em $[s_1 \dots s_n]$.

- A entropia topológica de $\sigma$ é $\ln 2$, mas não vamos discutir aqui esse assunto, além de dizer que entropia topológica mede a "complexidade dinâmica" de um sistema dinâmico.

- Mas passamos agora a um caso muuuito bem conhecido do Teorema de Hahn-Mazurkiewcz.

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DE NÚMEROS REAIS E A TRANSFORMAÇÃO DE DUPLICAÇÃO DE ÂNGULO EM $S^1$

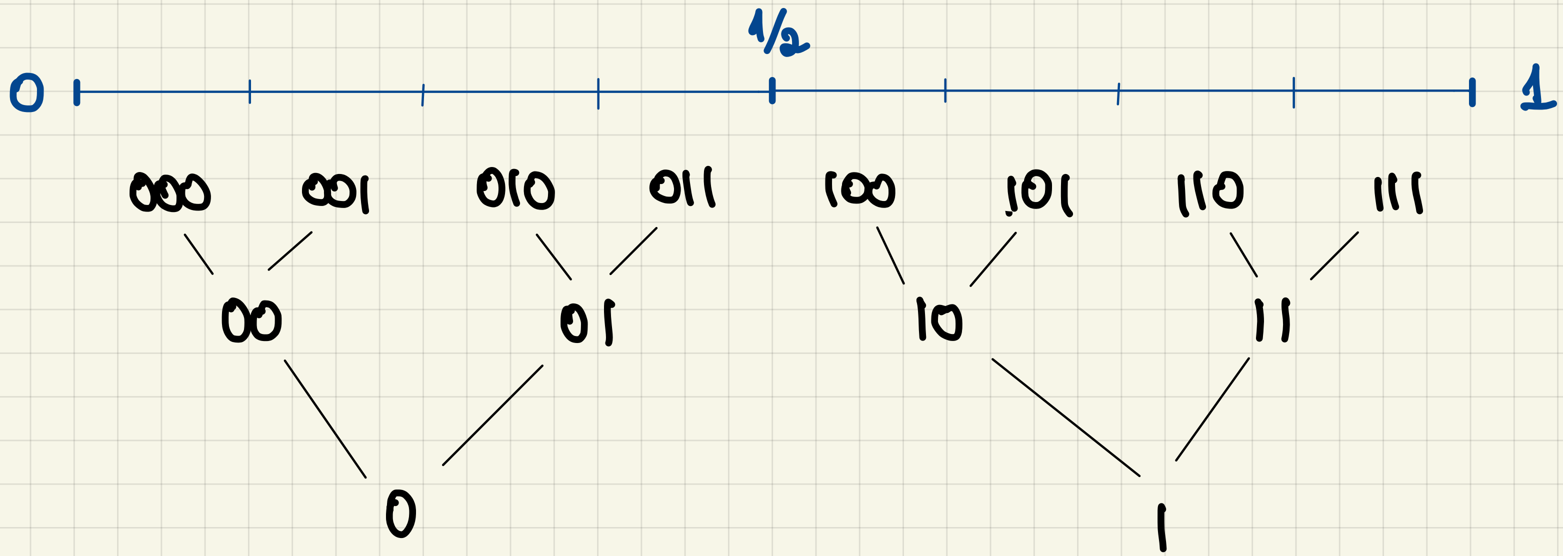
# Representação binária de números em $[0,1]$

- Muito mais comum do que tratar sequências infinitas de 0s e 1s como exatamente isso — sequências de 0s e 1s — como fizemos na palestra anterior, é tratá-las como representações binárias de números reais.

- Associamos à sequência $\underline{x} = x_1 x_2 x_3 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o número real

$$\boxed{\pi(\underline{x}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}}$$

- Essa é a forma analítica de descrever o processo que associa a um ponto no intervalo $[0,1]$ uma sequência infinita de 0s e 1s :




- O "problema" com a representação binária (ou ternária, ou decimal, ...) é que números como 1/2 acima têm duas representações : $0111\overline{1}\ldots$ e $1000\overline{0}\ldots$ .

- Cuja versão analítica é a igualdade

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} & = & \displaystyle\frac{1}{2} \\ \parallel & & \parallel \\ \pi(011\overline{1}\ldots) & & \pi(100\overline{0}\ldots) \end{array}$$

- Esses "fatos" sobre representações de números reais em $[0,1]$ podem ser organizados da seguinte forma:

- Há uma transformação $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ definida como acima

$$\pi(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} .$$

- $\pi$ é sobrejetiva : todo número real tem uma representação binária. Prova?

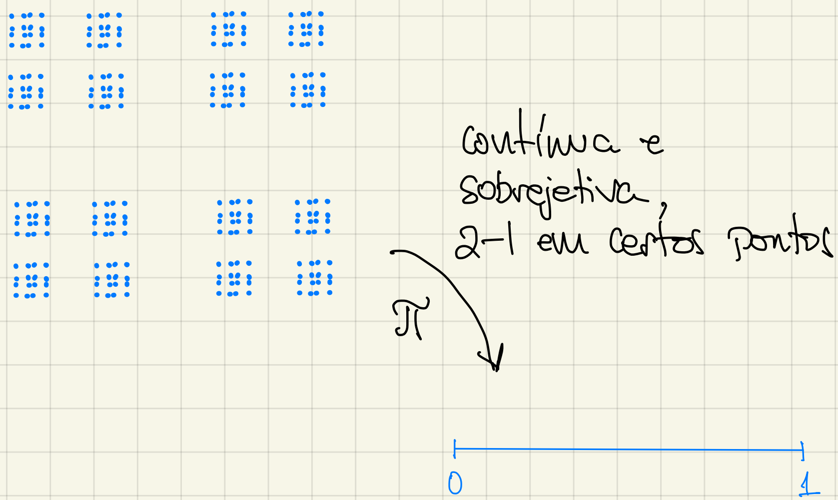
- $\pi$ não é injetiva : todo número da forma $\frac{k}{2^n} \in [0,1]$ tem exatamente duas representações binárias

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} 0 1 1 \bar{1} \ldots \quad e \quad x_1 x_2 \ldots x_{n-1} 1 0 0 \bar{0} \ldots .$$

- As propriedades anteriores são de teoria dos conjuntos, mas gastamos tempo e energia discutindo $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ como espaço métrico e podemos então falar de continuidade:
$\pi$ é contínua.

- A prova é simples: $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são próximos em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se sua discrepância é grande, isto é, se muitos símbolos iniciais de ambas as sequências coincidem; mas isso quer dizer que muitos termos iniciais das somas $\sum \frac{x_n}{2^n}$ e $\sum \frac{y_n}{2^n}$ coincidem, isto é, as somas são quase iguais.

- Assim, temos:




$\pi$ põe os elementos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ em ordem (a ordem "lexicográfica") e cola pares de pontos da forma $x_1 \dots x_{n-1} 0 \bar{1}$ e $x_1 \dots x_{n-1} 1 \bar{0}$. Dizemos que $[0,1]$ é o quociente de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ pela relação de equivalência $x_1 \dots x_{n-1} 0 \bar{1} \sim x_1 \dots x_{n-1} 1 \bar{0}$

# O shift e $x \mapsto 2x \bmod 1$

- Se entendemos uma sequência de 0s e 1s como a representação binária de um número real em $[0,1]$, o que é o shift? Isto é, queremos saber qual a relação entre

$$\tilde{\pi}(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n} = \tilde{\pi}(\sigma(\underline{x})).$$

- Mas

$$2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n} = x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n}$$

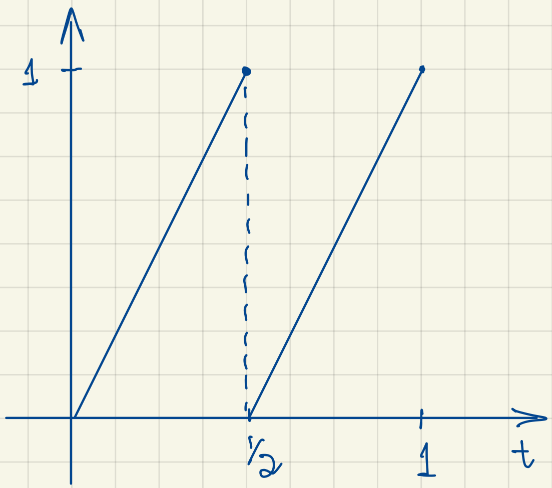
- Isto é,

$$\pi(\sigma(\underline{x})) = 2\,\pi(\underline{x}) - x_1 = \begin{cases} 2\pi(\underline{x}), & \text{se } x_1 = 0 \\ 2\pi(\underline{x}) - 1, & \text{se } x_1 = 1 \end{cases}$$

- Como $\begin{cases} x_1 = 0 \iff \pi(\underline{x}) \in [0, 1/2] \\ x_1 = 1 \iff \pi(\underline{x}) \in [1/2, 1] \end{cases}$, concluímos

que a "tradução" do shift em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ para $[0,1]$ pela projeção por representação binária é

$$\boxed{D(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ 2t - 1 & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}}$$



- Obviamente, há um problema em $1/2$, que tem duas representações binárias, $011\bar{1}\ldots$ e $100\bar{0}\ldots$, levados em números diferentes após o shift:

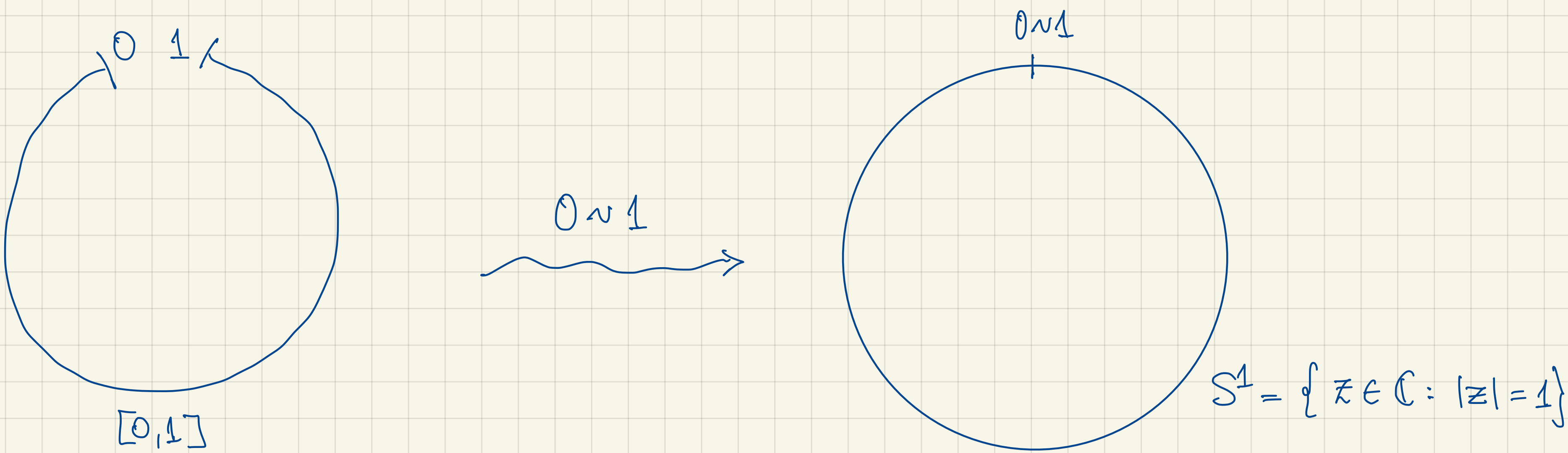
Note que essas são as duas únicas sequências problemáticas.

$$\pi(\sigma(011\bar{1}\ldots)) = \pi(11\bar{1}\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\pi(\sigma(100\bar{0}\ldots)) = \pi(00\bar{0}\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n} = 0$$

- Poderíamos simplesmente remover $1/2$ do intervalo, mas como estamos interessados em fazer dinâmica, isto é, em iterar transformações, teríamos também que remover todos os pontos que acabam "caindo em $1/2$" por iteração. Quais são?

• A maneira mais madura de lidar com o problema é, ao invés de remover o ponto com duas imagens diferentes, 0 e 1, identificar essas imagens em um só ponto:




• Mas a preocupação dinâmica continua: se identificamos dois pontos, devemos também identificar todas as suas imagens por iteradas $D^n$.

- Por sorte, não há nada mais a identificar, já que

$$D(0) = 0 \quad \text{e} \quad D(1) = 1 .$$

- Uma forma elegante de expressar o que aconteceu é usar exponenciação complexa para levar $[0,1]$ no círculo unitário $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$. Definindo $h(t) = e^{2\pi i t}$, segue que $h : [0,1] \to S^1$ é injetiva, exceto em $0$ e $1$, que são ambos levados em $h(0) = h(1) = 1$.

- E assim

$e^{2\pi i} = 1$

$$h(D(t)) = \begin{cases} e^{2\pi i(2t)}, & t \in [0,\tfrac{1}{2}] \\ e^{2\pi i(2t-1)}, & t \in [0,\tfrac{1}{2}] \end{cases} = \left(e^{2\pi i t}\right)^2 = h(t)^2.$$

- Isto é, colando 0 e 1 de $[0,1]$ usando $h : [0,1] \to S^1$, a transformação $D : [0,1] \circlearrowleft$ se torna bem definida e contínua e é simplesmente $\boxed{z \mapsto z^2}$ no círculo $\{z : |z| = 1\}$.

- Outra forma útil de pensar em $z \mapsto z^2$ em $S^1$ é como duplicação de ângulo : $\boxed{e^{i\theta} \longmapsto e^{2i\theta}}$.

- Podemos agora concluir sobre as transformações $t \mapsto 2t \mod 1$ e $e^{i\theta} \longmapsto e^{2i\theta}$ coisas que sabemos sobre $\sigma$: há $2^n$ órbitas periódicas de período $n$, órbitas periódicas são densas, a entropia topológica é $\ln 2$, etc.

- Isso requer algum cuidado, mas não é difícil.

- Você poderia argumentar que é possível provar essas afirmações diretamente, sem usar o shift. Isso é verdade aqui, mas será uma verdade menos óbvia quando discutirmos o solenóide.

# Minicurso IME 3 - Shift inversível e o solenóide

Abril 2024

# TORNANDO AS TRANSFORMAÇÕES INVERSÍVEIS

# O shift bilateral e o solenóide

- Podemos achar desagradável que $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \circlearrowleft$ seja 2-1. Por sorte, é facílimo resolver o problema: basta colar, às sequências de 0s e 1s infinitas para a direita, sequências de 0s e 1s infinitas para a esquerda:

$$\ldots y_3 y_2 y_1 . x_1 x_2 x_3 \ldots \, , \qquad x_i, y_i \in \{0,1\}$$

- O novo espaço assim obtido é $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, embora tenhamos escolhido subíndices que combinam mais com $\{0,1\}^{\mathbb{N} \cup \mathbb{N}}$.

- O shift agora passa a ter uma versão inversível:

$$\boxed{\sigma(\dots y_3 y_2 y_1 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots) = \dots y_2 y_1 x_1 \cdot x_2 x_3 x_4 \dots}$$

- O espaço de sequências bi-infinitas de 0s e 1s pode ser visto de diversas maneiras, mas aqui será útil pensá-lo como um produto:

Estamos sendo negligentes sobre se sequências são infinitas para a esquerda ou direita

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ \underline{y} \cdot \underline{x} = \dots y_3 y_2 y_1 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots \ : \ \underline{x}, \underline{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \}$$

- que tornamos em espaço métrico com a métrica do máximo

$$d(\underline{y} \cdot \underline{x}, \underline{w} \cdot \underline{z}) = \max \{ d(\underline{x}, \underline{z}), d(\underline{y}, \underline{w}) \}$$

- Para esse novo shift, órbitas periódicas continuam sendo as mesmas: palavras finitas $s_1 s_2 \ldots s_n$ repetidas infinitamente, para ambos os lados agora. E há $2^n$ de período $n$, claro.
- Também tem órbitas densas e entropia $\ln 2$, ...
- Mas o que estamos realmente interessados em entender é o que acontece se tentarmos novamente o truque de projetar para o intervalo usando a representação binária.
- Mais precisamente, queremos ver o que acontece com com o shift bilateral $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \circlearrowleft$ ao tomarmos o quociente $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ na coordenada $\underline{x}$.

- Isto é, queremos entender como se comporta o shift bilateral no espaço

intervalo $[0,1]$

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times I = \{ \underline{y} . \pi(\underline{x}) : \underline{x}, \underline{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \}$$

- Quando fizemos isso com o shift unilateral e a projeção $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to I$, obtivemos $x \mapsto 2x \bmod 1$, mas tivemos um problema com duas sequências, $0\bar{1}$ e $1\bar{0}$, que representam o mesmo ponto, $1/2$, e que o shift manda para dois pontos diferentes, $0$ e $1$ em $I$.

- Para o shift bilateral, teremos o mesmo problema, só que muito pior: um número infinito de vezes, um para cada coordenada $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

- Para cada $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

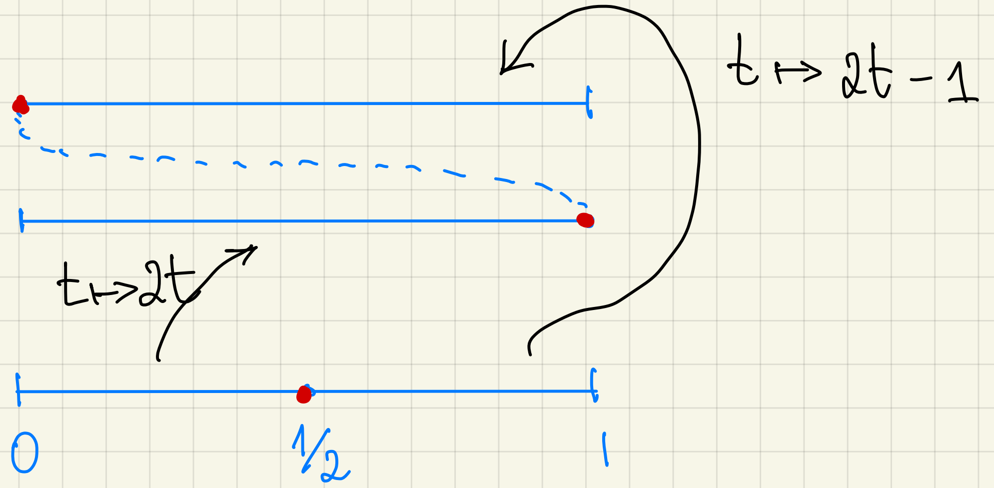
  - dois pontos, $y.0\bar{1}$ e $y.1\bar{0}$ são levados ao mesmo ponto pela projeção: $\underline{y}.\pi(0\bar{1}) = \underline{y}.\pi(1\bar{0}) = y.1/2$.

  - mas suas imagens por $\sigma$ são projetadas a pontos diferentes:

$$\underline{y0}.\pi(\sigma(0\bar{1})) = y0.\pi(\bar{1}) = y0.1$$

$$\underline{y1}.\pi(\sigma(1\bar{0})) = \underline{y1}.\pi(\bar{0}) = y1.0$$

- Em figuras: o caso anterior, do shift unilateral.

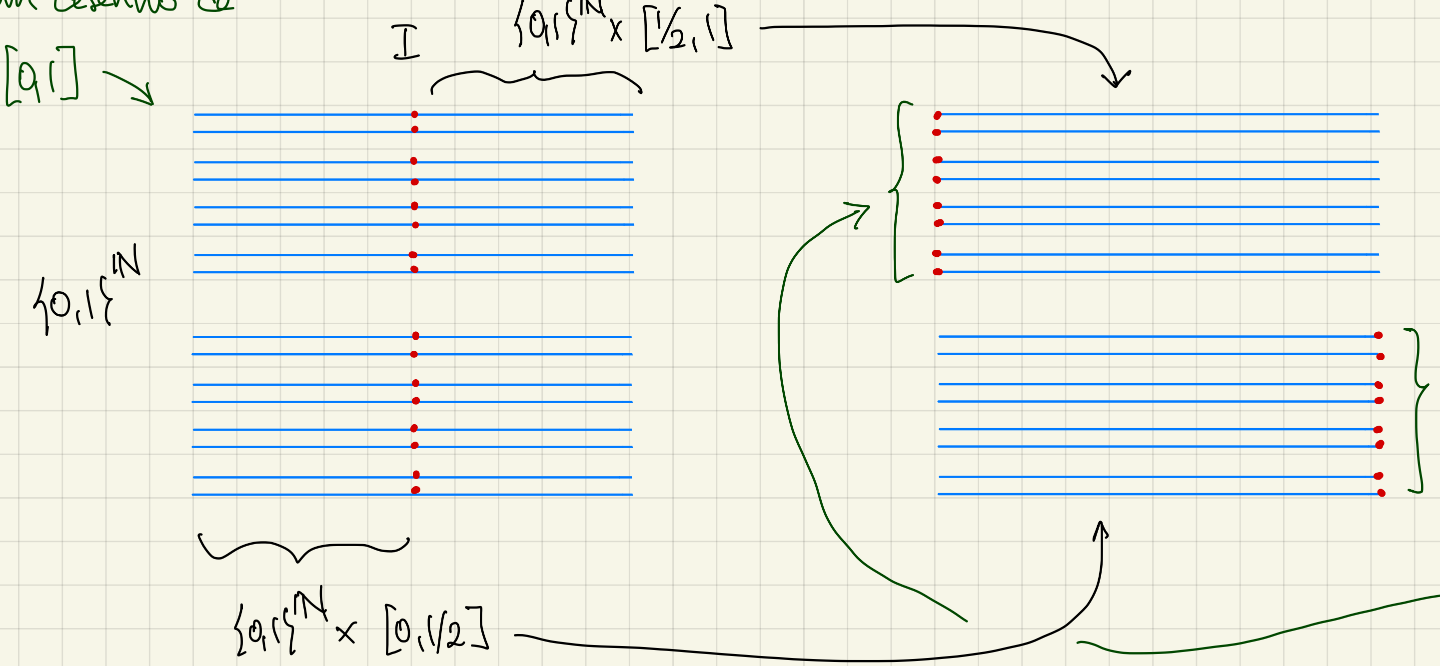



- Para termos uma boa definição, é necessário identificar imagens diferentes do mesmo ponto $1/2$:

$$\left.\begin{aligned} \pi(\sigma(0\bar{1})) &= \pi(\bar{0}) = 0 \\ \pi(\sigma(1\bar{0})) &= \pi(\bar{1}) = 1 \end{aligned}\right\} \text{ apenas esses dois pontos.}$$

- Em figuras: o caso atual, do shift projetado a $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times I$.

Esse é um desenho de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,1]$




Esse também, só que da imagem por $\sigma$ e projeção.

- Aqui, para obter uma boa definição, é preciso identificar pontos da forma abaixo, para todo $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$y0.\pi(\sigma(0\bar{1})) = y0.\pi(\bar{1}) = y0.1$$

$$y1.\pi(\sigma(1\bar{0})) = y1.\pi(\bar{0}) = y1.0$$

- Mas, se colamos dois pontos (porque deveriam ser a imagem de um único ponto), temos que fazer exatamente o mesmo com as imagens dos pontos que identificamos. E depois com as imagens das novas identificações, e assim indutivamente.

- No caso do shift unilateral foi fácil porque ambos os pontos que colamos eram pontos fixos:

$$\left.\begin{aligned} \pi(\sigma(0\bar{1})) &= \pi(\bar{1}) = 1 \circlearrowleft \\ \pi(\sigma(1\bar{0})) &= \pi(\bar{0}) = 0 \circlearrowleft \end{aligned}\right\} \text{ já que } \begin{cases} \sigma(11\bar{1}\ldots) = 11\bar{1}\ldots \\ \sigma(00\bar{0}\ldots) = 00\bar{0}\ldots \end{cases}$$

e não há mais nada a identificar.

- No caso do shift bilateral (que é, afinal, inversível), se identificamos dois pontos, devemos identificar todas as suas $\sigma$-órbitas: todas as suas imagens (e pré-imagens) por iteradas $\sigma^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- As identificações iniciais são, como vimos, dos pares

$$y0.\pi(\sigma(0\bar{1})) = y0.\pi(\bar{1}) = y0.1$$

$$y1.\pi(\sigma(1\bar{0})) = y1.\pi(\bar{0}) = y1.0$$

- Cujas imagens são

$$y01.\pi(\sigma^2(0\bar{1})) = y01.\pi(\bar{1}) = y01.1$$

$$y10.\pi(\sigma^2(1\bar{0})) = y10.\pi(\bar{0}) = y10.0$$

- Em geral, temos que colar pares de pontos da forma

$$\boxed{y\,01^n . 1 \quad \sim \quad y\,10^n . 0} \quad \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,1] .$$


- Por segurança (topológica), é bom identificar também

$$\ldots\bar{0}000 . 0 \quad \text{e} \quad \ldots\bar{1}111 . 1 .$$

- Chegamos então a

  - <u>um espaço $S$</u>, obtido de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ primeiro tomando a projeção na coordenada $x$ para $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,1]$ e, em seguida, identificando pares de pontos $y01^n.1 \sim y10.0$.

Chamamos de $h$ essa composição

  - uma transformação bem definida e inversível que denotamos por $\hat{D} : S \circlearrowleft$, definida de modo que o diagrama ao lado seja comutativo,

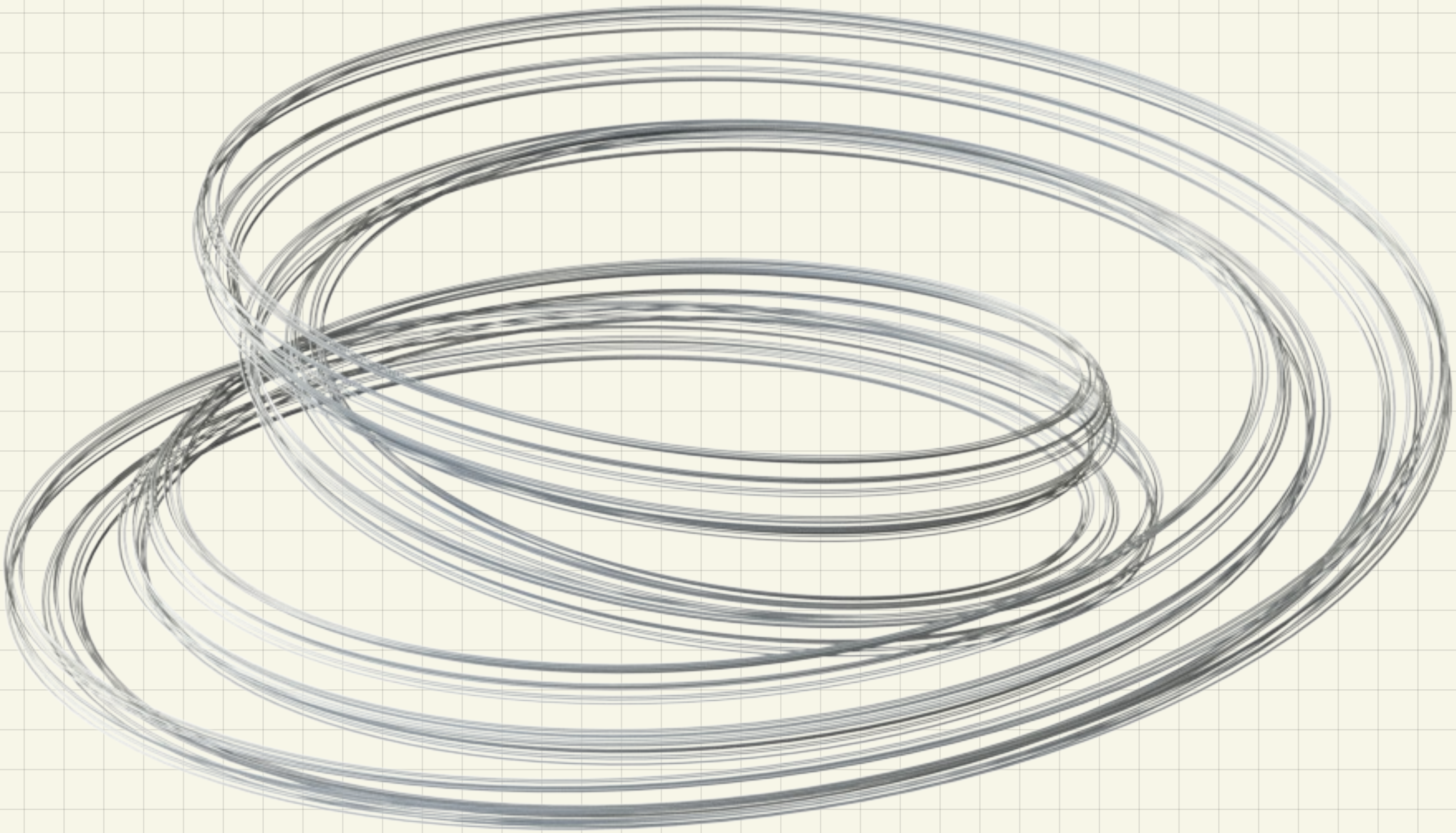
$$\begin{array}{ccc} \{0,1\} \times \{0,1\} & \circlearrowleft & \sigma \\ \big\downarrow \text{ projeção } h & & \\ S & \circlearrowleft & \hat{D} \end{array}$$

isto é,

$$\boxed{h \circ \sigma = \hat{D} \circ h}$$

- $\hat{D} : S \circlearrowleft$ é o <u>SOLENÓIDE</u>.

- O solenóide (figura de A. Chéritat)



PRA NÃO DIZER QUE NÃO FALEI DE ÁLGEBRA

# Os números 2-ádicos e o solenóide

- Sequências de 0s e 1s <u>infinitas para a esquerda</u> também são números, com operações de soma e produto:

vai um

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ \ \ \, \\ \ldots\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ +\ \ldots\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ \hline \ldots\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \end{array}$$

vão uns

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,1\,1\ \ \\ \ldots\ 1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ +\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 \\ \hline \ldots\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

- O produto é definido analogamente.

- Esses são os inteiros 2-ádicos e formam um anel comutativo com unidade, denotado por $\mathbb{Z}_2$.

- Mas voltamos a dinâmica e em $\mathbb{Z}_2$ vamos considerar uma transformação "simples": somar $\underline{1}$.

$$a : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$
$$z \longmapsto z + \underline{1}.$$

- Por exemplo, começando de $0$ e aplicando $\underline{a}$ repetidamente, obtemos

$$0 \mapsto 1 \mapsto 10 \mapsto 11 \mapsto 100 \mapsto 101 \to 110 \to 111 \to \cdots$$

- Isto é, obtemos todas as palavras finitas de 0s e 1s: essa é, portanto, uma órbita densa em $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

- É possível mostrar que, na verdade, todas as órbitas de $\underline{a} : \mathbb{Z}_2 \circlearrowleft$ são densas : a é minimal.

- Não vamos continuar a discussão dinâmica aqui, mas vamos ver o que $\underline{a}$ faz com $\mathbb{Z}_2$ dividindo $\mathbb{Z}_2$ em pontos das seguintes formas (onde $\underline{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$) :

$$\begin{array}{ccc} \underline{y}\,0 & \overset{a}{\longmapsto} & \underline{y}\,1 \\ \underline{y}\,01 & \longmapsto & \underline{y}\,10 \\ \underline{y}\,011 & \longmapsto & \underline{y}\,100 \\ \underline{y}\,0111 & \longmapsto & \underline{y}\,1000 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

O único ponto de $\mathbb{Z}_2$ que não está na coluna à esquerda é $\ldots\overline{1}11 \overset{a}{\longmapsto} \ldots\overline{0}00$.

- Vejamos a mesma informação em cores e comparemos com as identificações do solenóide

$$
\begin{aligned}
y0 &\xmapsto{a} y1\\
y01 &\longmapsto y10\\
y011 &\longmapsto y100\\
y0111 &\longmapsto y1000\\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

- O que isso quer dizer é que é possível obter o espaço $S$ de outra forma, como suspensão ("mapping torus", em inglês) da transformação $a : \mathbb{Z}_2 \circlearrowleft$.

- Em geral, se $f : X \circlearrowleft$, podemos definir a suspensão

$$M_f = \left( X \times [0,1] \right) \Big/ _{(x,1) \sim (f(x),0)} .$$

- No caso do solenóide

$$\boxed{S = \left( \mathbb{Z}_2 \times [0,1] \right) \Big/ _{(z,1) \sim (z+1,0)}}$$

- Disso segue, por exemplo, que toda componente conexa por caminhos de $S$ é homeomorfa a $\mathbb{R}$ e é densa em $S$.

Fim